GUIA DE ESTUDIO DE GEOMETRIA ANALITICA

RELACIÓN ENTRE PUNTOS DEL PLANO

<u>EJERCICIO 1</u> : Halla el punto medio del segmento de extremos $P(2, 1)$ y $Q(-4, 3)$.

Solución:
Las coordenadas del punto medio, *M*, son la semisuma de las coordenadas de los extremos:

$$M\left(\frac{2-4}{2}, \frac{1+3}{2}\right)=(-1, 2)$$

<u>EJERCICIO 2</u> : Halla el simétrico, A', del punto $A(-1, 0)$ respecto de $B(2, -8)$.

Solución:
Llamamos (x, y) a las coordenadas de A'. El punto medio del segmento de extremos A y A' es B.

Por tanto:
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{-1+x}{2}=2\\[2mm] \dfrac{0+y}{2}=-8\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}x=5\\ y=-16\end{array} \Rightarrow A'(5, -16)$$

<u>EJERCICIO 3</u> : Determinar si los puntos A(3,1), B(5,2) y C(1,0) están alineados.

Solución:
$$\begin{array}{l}AB=(5,2)-(3,1)=(2,1)\\ AC=(1,0)-(3,1)=(-2,-1)\end{array} \Rightarrow \frac{2}{-2}=\frac{1}{-1}$$ *Cierto* $\Rightarrow$ *Están alineados*

<u>EJERCICIO 4</u> : Halla el valor de k para que los puntos $A(1, 1)$, $B(0, 3)$ y $C(2,k)$ estén alineados.

Solución:)
$$\begin{array}{l}AB=(0,3)-(1,1)=(-1,2)\\ AC=(2,k)-(1,1)=(1,k-1)\end{array} \Rightarrow \frac{-1}{1}=\frac{2}{k-1} \Rightarrow -k+1=2 \Rightarrow k=-1$$

ECUACIONES DE RECTAS

<u>EJERCICIO 5</u> :
a) Escribe la ecuación general de la recta, *r*, que pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(3, 6)$.
b) Halla la ecuación de la recta, *s*, paralela a $y=\frac{1}{2}x$ que pasa por el punto $(4, 4)$.
c) Obtén el punto de corte de las dos rectas anteriores.

Solución:

a) Pendiente $=\dfrac{6-0}{3-1}=\dfrac{6}{2}=3$

Ecuación: $y-0=3(x-1) \Rightarrow y=3x-3 \Rightarrow 3x-y-3=0$

b) Si son paralelas, tienen la misma pendiente: $m=\dfrac{1}{2}$.

Ecuación: $y-4=\dfrac{1}{2}(x-4) \Rightarrow 2y-8=x-4 \Rightarrow x-2y+4=0$

c) Es la solución del sistema siguiente:
$$\left.\begin{array}{l}3x-y-3=0 \Rightarrow y=3x-3\\ x-2y+4=0\end{array}\right\} \Rightarrow x-2(3x-3)+4=0 \Rightarrow x-6x+6+4=0 \Rightarrow -5x=-10 \Rightarrow x=2$$
$$y=3 \qquad \text{Punto: } (2, 3)$$

<u>EJERCICIO 6</u> :

a Halla la ecuación de la recta, *r*, que pasa por 3, 2 y tiene como vector dirección d 1, 1 .

b Escribe la ecuación de la recta, *s*, que pasa por 5, 2 y es paralelo al eje *X*.

c Obtén el punto de corte de las dos rectas anteriores.

Solución:

a) Pendiente $\frac{1}{1}$ 1 Ecuación: y 2 1 x 3 y 2 x 3y x 1

b y 2

c Es la solución de este sistema: $\begin{matrix} y \ x \ 1 \\ y \ 2 \end{matrix}$ x 1 2 x 3 Punto: 3, 2

<u>EJERCICIO 7</u> :

a Halla la ecuación de la recta, *r* , que pasa por 0, 0 y es paralela al vector d 3, 6 .

b Escribe la ecuación general de la recta, *s*, que pasa por 3, 4 y es perpendicular a *x* *y* 5 0.

c Obtén el punto de intersección de las dos rectas anteriores.

Solución:

a Pendiente $\frac{6}{3}$ 2

Ecuación: y 2x

b Pendiente de x y 5 0 y x 5 m 1

Pendiente de la perpendicular $\frac{1}{m}$ $\frac{1}{1}$ 1

Ecuación de s: y 4 1 x 3 y 4 x 3 x y 1 0

c Es la solución del siguiente sistema: $\begin{matrix} y \ 2x \\ x \ y \ 1 \quad 0 \end{matrix}$ x 2x 1 0x 1y 2 Punto: 1, 2

<u>EJERCICIO 8</u> :

a Obtén la ecuación de la recta, *r* , que pasa por 3, 1 y tiene pendiente $\frac{1}{2}$.

b Escribe la ecuación de la recta, *s*, perpendicular a *x* 3*y* 2 que pasa por 2, 4 .

c Halla el punto de intersección de las rectas *r* y *s*.

Solución:

a y 1 $\frac{1}{2}$$x$ 32y 2 x 3x 2y 1 0

b Pendiente de x 3y 2y $\frac{x\ 2}{3}$ $\frac{1}{3}$$x$ $\frac{2}{3}$ m $\frac{1}{3}$

Pendiente de la perpendicular $\frac{1}{m}$ $\frac{1}{1\,3}$ 3

Ecuación: y 4 3 x 2 y 4 3x 6 y 3x 10

c Es la solución del siguiente sistema:

x 2y 1 0 x 2 3x 10 1 0x 6x 20 1 0

y 3x 10 7x 21 x 3 y 1 Punto: 3, 1

<u>EJERCICIO 9</u> :

a Escribe la ecuación general de la recta, *r*, que pasa por los puntos 0, 5 y 1, 2 .

b Obtén la ecuación de la recta, *s*, paralela a 2*x* *y* 3 que pasa por el punto 1, 1 .

c Halla el punto de corte de las dos rectas anteriores.

Solución:

a Pendiente $\frac{2\ 5}{1\ 0}$ $\frac{3}{1}$ 3 Ecuación: y 5 3 x 0 y 5 3x3x y 5 0 b Si son paralelas, tienen la misma pendiente: $2x \ y \ 3 \qquad y \ 2x \ 3 \qquad m \ 2$

Ecuación: $y \ 1 \ 2 \ x \ 1y \ 1 \ 2x \ 2 \qquad y \ 2x \ 3$

c Es la solución del sistema siguiente: $3x \ y \ 5 \ 0 \ 3x \ 2x \ 3 \ 5 \ 0x \ 2y \ 1$

$y \ 2x \ 3$ Punto: $2, \ 1$

EJERCICIO 10 :

a) Escribe la ecuación de la recta que pasa por (2, 1) y es paralela a $y \ \frac{1}{2} \ x \ 3$.

b Halla la ecuación de la recta que pasa por $0, \ 2$ y es perpendicular a $2x \ y \ 3$.

Solución:

a Si son paralelas, tienen la misma pendiente: $y \ \frac{1}{2}x \ 3 \qquad m \ \frac{1}{2}$

Ecuación: $y \ 1 \ \frac{1}{2}x \ 2 \qquad 2y \ 2 \ x \ 2 \qquad 2y \ x \qquad y \ \frac{x}{2}$

b Pendiente de $2x \ y \ 3 \qquad y \ 2x \ 3 \qquad m \ 2$

Pendiente de la perpendicular $\frac{1}{m} \ \frac{1}{2} \ 2 \ \frac{1}{}$

Ecuación: $y \ 2 \ \frac{1}{2}x \qquad 2y \ 4 \ x \qquad x \ 2y \ 4 \ 0$

EJERCICIO 11 : Dados los puntos A 2, 1 y B 3, 4 , halla las ecuaciones de las dos rectas siguientes:

a) r: pasa por A y es paralela a AB **b) s: pasa por B y es paralela a AB**

Solución: AB 1, 5

Recta r : $m \ \frac{5}{1}$. Ecuación: $y \ 1 \ 5 \ x \ 2 \qquad y \ 1 \ 5x \ 105x \ y \ 11 \ 0$

Recta s : $m \ \frac{1}{m} \ \frac{1}{5} \ \frac{1}{5}$ Ecuación: $y \ 4 \ \frac{1}{5}x \ 35y \ 20 \ x \ 3x \ 5y \ 23 \ 0$

EJERCICIO 12 :

a Obtén la ecuación de la recta paralela al eje X que pasa por el punto 5, 1 .

b Halla la ecuación general de la recta perpendicular a $3x \ y \ 1$ que pasa por el punto 0, 1 .

Solución: a $y \ 1$

b Pendiente de $3x \ y \ 1 \qquad y \ 3x \ 1 \qquad m \ 3$

Pendiente de la perpendicular $\frac{1}{m} \ \frac{1}{3}$

Ecuación: $y \ 1 \ \frac{1}{}x \ 3y \ 3 \ x \ x \ 3y \ 3 \ 0 \ 3$

EJERCICIO 13 :

a Halla la ecuación de la recta, *r*, paralela a $2x \ 3y \ 4 \ 0$, que pasa por 1, 2 .

b Halla la ecuación de la recta perpendicular a $y \ 1 \ 0$ que pasa por 3, 2 .

Solución:

a Puesto que son paralelas, tienen la misma pendiente:

$2x \ 3y \ 4 \ 0y \qquad \frac{2x \ 4}{3} \ \frac{2}{3}x \ \frac{4}{3} \ m \ \frac{2}{3}$

Ecuación de r : $y \ 2 \ \frac{2}{3}x \ 1 \qquad 3y \ 6 \ 2x \ 22x \ 3y \ 8 \ 0$

b La recta y 1 0 es paralela al eje X; por tanto, la que buscamos, es paralela al eje Y. Su ecuación será x 3.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

<u>EJERCICIO 14</u> : Calcula la distancia que hay entre los puntos $A(8, 10)$ y $B(-2, -14)$.

Solución: $dist(A, B) = \sqrt{(-2-8)^2 + (-14-10)^2} = \sqrt{10^2 + 24^2} = \sqrt{100 + 576} = \sqrt{676} = 26$

<u>EJERCICIO 15</u> : Halla la distancia entre los puntos $P(6, -2)$ y $Q(0, 6)$.

Solución: $dist(P, Q) = \sqrt{(0-6)^2 + (6-(-2))^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$

ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

<u>EJERCICIO 16</u> : Halla la ecuación de la circunferencia de centro (4, 2) y radio 5.

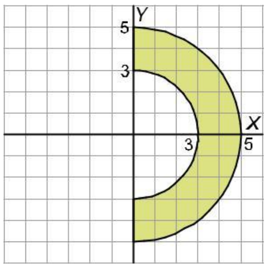
Solución: La ecuación es: $\sqrt{(x\ \ 4)^2 \ \ (y\ \ 2)^2} \ \ 5.$

<u>EJERCICIO 17</u> : Escribe la ecuación de la circunferencia de centro (3, 4) y radio 4.

Solución: La ecuación es: $\sqrt{(x\ \ 3)^2 \ \ (y\ \ 4)^2} \ \ 4$

REGIONES EN EL PLANO

<u>EJERCICIO 18</u> :¿Cuáles de los siguientes sistemas de inecuaciones corresponden a este recinto?



a) $x^2\ \ y^2\ \ 25$
$x^2\ \ y^2\ \ 9$

b) $x\ \ 0$
$x^2\ \ y^2\ \ 25$
$x^2\ \ y^2\ \ 9$

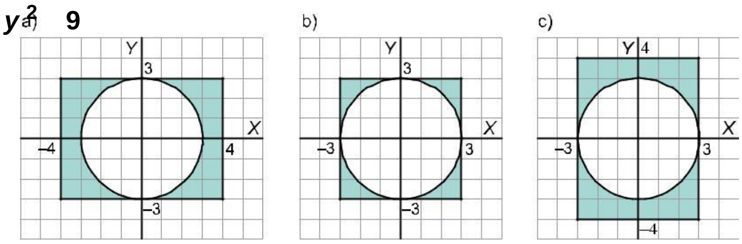
c) $x^2\ \ y^2\ \ 9$
$x^2\ \ y^2\ \ 25$
$x\ \ 0$

Solución:

c Las dos curvas dadas corresponden a dos semicircunferencias de centro (0, 0) y radios 3 y 5, respectivamente. Los puntos señalados corresponderán a semicircunferencias de radio entre 3 y 5, esto es: $x^2\ \ y^2\ \ 9$; $x^2\ \ y^2\ \ 25$; $x\ \ 0$

<u>EJERCICIO 19 :</u> Indica cual de los siguientes recintos corresponde a este sistema de inecuaciones:

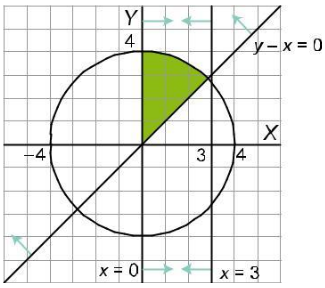
$3\ \ x\ \ 3$
$4\ \ y\ \ 4$
$x^2\ \ y^2\ \ 9$



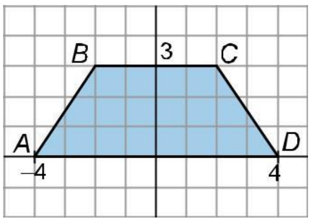
Solución:
Le corresponde el recinto c).
x 3 y x 3 son rectas paralelas al eje Y que pasan, por ejemplo, por 3, 0 y 3, 0 respectivamente.
y 4 e y 4 son rectas paralelas al eje X que pasan, por ejemplo, por 0, 4 y 0, 4 .
x^2 y^2 9 es una circunferencia de centro 0, 0 y radio 3; los puntos que cumplen x^2 y^2 9 pertenecen a la circunferencia o están fuera de ella.

EJERCICIO 20 : **Representa gráficamente el siguiente recinto:** x^2 y^2 16; y x 0; 0 x 3

Solución:
x^2 y^2 16 es la inecuación que describe la circunferencia de centro 0, 0 y radio 4, y el interior de dicha circunferencia.
y x 0 y x bisectriz del 1^er^ y 3^er^ cuadrante .
Para saber que parte del plano corresponde a la inecuación y x > 0 tomamos, por ejemplo, el punto 3, 1 y lo sustituimos en y x 1 3 2 < 0.
Por tanto, el semiplano en el que no esta el punto 3, 1 es el que corresponde a la inecuación y x > 0.
x 0, x 3 son rectas paralelas al eje Y.
La representación gráfica correspondiente será:



EJERCICIO 21 : **Describe, mediante un sistema de inecuaciones, el siguiente recinto:**



Solución:
Hallamos las ecuaciones de las rectas *AB*, *BC*, *CD* y *DA.*
AB es la recta que pasa por *A*(4, 0) y tiene pendiente m $\frac{3}{2}$.
La ecuación será: y $\frac{3}{2}x$ 4 2y 3x 12 0
Tomamos un punto cualquiera del recinto, por ejemplo 1, 2 , y lo sustituimos en la ecuación anterior: 2 · 2 3 · 1 12 11 < 0. Por tanto, el semiplano buscado es 3x 2y 12 0.
BC es paralela al eje X y pasa por 0, 3 y 3 El semiplano buscado es y 3.

CD es la recta que pasa por $D(4, 0)$ y tiene pendiente $m \; \frac{3}{2}$.

La ecuación será: $y \; \frac{3}{2}x \; 4 \quad 2y \; 3x \; 12 \; 3x \; 2y \; 12 \; 0$

Sustituimos el punto $1, 2 \quad 3 \cdot 1 \; 2 \cdot 2 \; 12 \quad 5 < 0$

El semiplano buscado es $3x \quad 2y \quad 12 \quad 0$.

DA es el eje $X \qquad y \quad 0$. El semiplano será $y \quad 0$.

$3x \quad 2y \; 12 \quad 0$

$0 \; y \quad 3$

REPASO

EJERCICIO 22 :

¿Cuál de las rectas $r: y \; 3 \; 5x \; 1$, $s: y \; \frac{2}{5}x$ y $t: \frac{x \; 1}{5} \; \frac{1 \; y}{2}$ es paralela a la recta $2x \; 5y \; 4 \; 0$?

Solución:

Dos rectas son paralelas cuando tienen la misma pendiente.

Pendiente de $r \quad m \; 5$

Pendiente de $s \quad m \; \frac{2}{5}$

Pendiente de $t: \frac{x \; 1}{5} \; \frac{1 \; y}{2} \quad \frac{2}{5}x \; 1 \; 1 \; y \quad y \; 1 \; \frac{2}{5}x \; 1$

$y \quad \frac{2}{5}x \; 1 \; \frac{2}{5} \; y \quad \frac{2}{5} \; x \; \frac{3}{5} \; m \quad \frac{2}{5}$

La pendiente de $2x \; 5y \; 4 \; 0$ es $m \; \frac{2}{5}$. Luego s es la recta paralela a $2x \; 5y \; 4 \; 0$.

EJERCICIO 23 : Dada la recta $ax \; by \; 0$, indica qué relación debe haber entre a y b para que el punto $P \; 2, 6$ pertenezca a la recta.

Solución:

El punto $P \quad 2, 6$ pertenecerá a la recta $ax \quad by \quad 0$ si se cumple:
$a \cdot 2 \; b \cdot 6 \; 0 \; 2a \; 6b \; 0 \; a \; 3b \; 0 \; a \; 3b$ Luego, $P \; 2, 6$ pertenecerá a dicha recta si a es el triple de b.

EJERCICIO 24 : Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

$2 \qquad 2$

b) La recta de ecuación $ax \quad c \quad 0$ es una recta paralela al eje $Y \quad a, c$.

c Si m_1 y m_2 son las pendientes de dos rectas paralelas se cumple que $m_1 \quad m_2 \quad 0$.

d) La pendiente de una recta perpendicular a $r: ax \quad by \quad c \quad 0$ es $\frac{a}{}$.

Solución:

a FALSO.

La ecuación de una circunferencia de centro $C \; a, b$ y radio r es: $x \quad a^2 \quad y \quad b^2 \quad r^2$

En este caso: $x \; 0^2 \; y \; 3^2 \; 9$, pero r^2 no puede ser negativo; luego la ecuación dada no es la ecuación de una circunferencia.

b VERDADERO.

$ax \;\; c \;\; 0 x \qquad \frac{c}{a}$ constanterecta paralela al eje Y que pasa por $\frac{c}{a}$, 0

c VERDADERO.

Por ser paralelas las rectas $m_1 \quad m_2 m_1 \quad m_2 \qquad 0$

d FALSO.

La pendiente de r es $m \;\; \frac{a}{b} \;\; y \;\; \frac{a}{b} x \;\; \frac{c}{b}$ la pendiente de la recta perpendicular

a r es $m^1 \; b \; . \; m \; a$

EJERCICIO 25 : **¿Qué relación habrá entre *a* y *b* para que las rectas *r* : $ax \quad 3y \quad 6$ y *s*: $bx \;\; y \;\; 5$ sean paralelas? ¿Y para que sean perpendiculares?**

Solución:

r y s son paralelas si la pendiente de ambas coincide.

Pendiente de $r \qquad 3y \;\; 6 \;\; ax \qquad y \;\; \frac{a}{3} x \;\; 2 \qquad m_r \;\; \frac{a}{3}$

Pendiente de $s \qquad y \;\; bx \;\; 5 \qquad m_s \;\; b$

$m_r \quad m_s \qquad \frac{a}{3} \quad b \qquad a \quad 3b$

Por tanto, r y s serán paralelas cuando a sea el triple de b.

Para que r y s sean perpendiculares $m_r \;\; \frac{1}{m_s} \qquad \frac{a}{3} \;\; \frac{1}{b} \qquad ab \;\; 3$

EJERCICIO 26 : **Halla el valor de *m* para que las rectas *r* : $y \; x \; 3 \; 0$ y *s*: $mx \; 3y \; 1 \; 0$ no se corten.**

Solución:

Para que r y s no se corten, el valor de m buscado será aquel que haga que r y s sean paralelas, es decir, tengan la misma pendiente.

Pendiente de $r \qquad y \quad x \quad 3 \qquad m_r \quad 1$

Pediente de $s \; 3y \;\; 1 \;\; mx y \qquad \frac{m}{3} x \;\; \frac{1}{3} \qquad m_s \;\; \frac{m}{3}$

$m_r \;\; m_s 1 \qquad \frac{m}{3} \;\; 3 \;\; m$

EJERCICIO 27 : **Dadas las rectas *r* : $ax \;\; c \;\; 0$ y *s*: $a'x \;\; c' \;\; 0$:**

a ¿Son paralelas?

b ¿Qué condición se ha de cumplir para que sean coincidentes?

c Escribe la ecuación de la recta perpendicular a *r* y *s* que pase por el punto 2, 3 .

Solución:

a Sí. Son rectas de la forma $x \;\; k$, es decir, rectas paralelas al eje Y.

b Para que sean coincidentes $\frac{c}{a} \;\; \frac{c}{a}$.

c Una recta perpendicular a r y s es de la forma $y \; k'$, recta paralela al eje X. Como tiene que pasar por el punto 2, 3 , entonces la recta buscada es y 3.

EJERCICIO 28 :

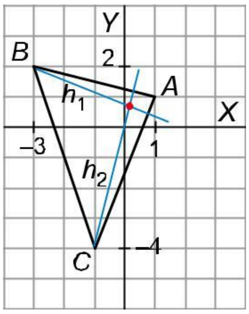
En el triángulo de vértices *A*(1, 1 , *B* 3, 2 y *C* 1, 4 halla:

a La ecuación de la altura h_1 que parte de *B*.

b La ecuación de la altura h_2 que parte de *C*.

c El ortocentro del triángulo punto de intersección de las alturas .

Solución:



a La altura h_1 es perpendicular al lado *AC*.

Pendiente de *ACm* $_1$ $\frac{5}{2}$ $\frac{5}{2}$

Pendiente de h_1 m_1 $\frac{2}{5}$

La recta h_1 pasa por *B* y su pendiente es $\frac{2}{5}$; luego su ecuación es:

$y\ 2\ \ \frac{2}{5}x\ \ 35y\ \ 10\ \ 2x\ \ 65y\ \ 2x\ \ 4\ \ 0$

b La altura h_2 es perpendicular al lado *AB*.

Pendiente de *AB* $\frac{1}{}$ m_2

Pendiente de h_2 m_2 4

La recta h_2 pasa por *C* y su pendiente es 4; su ecuación es:

$y\ \ 4\ \ 4\ x\ \ 1y\ \ 4\ \ 4x\ \ 4y\ \ 4x\ \ 0$

c Par calcular el ortocentro, resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de h_1 y h_2 :

$5y\ \ 2x\ \ 4\ \ 05\ \ 4x\ \ \ 2x\ \ 4\ \ 020x\ \ 2x\ \ 4\ \ 022x\ \ 4x$ $\frac{4}{22}$ $\frac{2}{11}$

$y\ \ 4x\ \ 0$

$y\ \ 4x$

$y\ \ 4x\ \ 4$ $\frac{2}{11}$ $\frac{8}{11}$ El ortocentro es el punto $\frac{2}{11}$, $\frac{8}{11}$

EJERCICIO 29 : **Calcula el valor de *a* y de *b* para que las rectas *r* : *ax* 3*y* 2 0 y *s*: *bx* 9*y* 5 0 sean paralelas y, además, *r* pase por el punto *P* 1, 2 .**

Solución:

Pendiente de r: $ax\ \ 2\ \ 3y$ $y\ \ \frac{a}{3}\ x\ \ \frac{2}{3}$ $m_r\ \ \frac{a}{3}$

Pendiente de s: $bx\ \ 5\ \ 9y$ $y\ \ \frac{b}{9}x\ \ \frac{5}{9}$ $m_s\ \ \frac{b}{9}$

Para que *r* y *s* sean paralelas, las pendientes han de coincidir:

$m_r\ \ m_s$ $\frac{a}{3}$ $\frac{b}{9}$ $3a\ \ bb\ \ 3a$

Calculamos *a* sabiendo que *P* 1, 2 pertenece a la recta *r* :

$a \cdot 1 \quad 3 \cdot 2 \quad 2 \quad 0 \qquad a \quad 6 \quad 2 \quad 0 \qquad a \quad 4$ Por tanto, $a \quad 4$ y $b \quad 3 \cdot 4 \quad 12$.

EJERCICIO 30 : Las rectas $r: 3x + y + 4 = 0$, $s: 3x + 4y - 11 = 0$ y $t: 3x - 2y + 1 = 0$ forman un triángulo ABC. Calcula los vértices y el ortocentro del triángulo.

Solución:

Calculamos los vértices resolviendo los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} 3x + y + 4 = 0 \\ 3x + 4y - 11 = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{r} 3x + y + 4 = 0 \\ -3x - 4y + 11 = 0 \\ \hline -3y + 15 = 0 \end{array} \;\rightarrow\; y = 5$$

$$3x + 5 + 4 = 0 \rightarrow 3x = -9 \rightarrow x = -3$$

Luego $A(-3, 5)$.

$$\begin{cases} 3x + y + 4 = 0 \\ 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{r} 3x + y + 4 = 0 \\ -3x + 2y - 1 = 0 \\ \hline 3y + 3 = 0 \end{array} \;\rightarrow\; y = -1$$

$$3x - 1 + 4 = 0 \rightarrow 3x = -3 \rightarrow x = -1$$

Por tanto $B(-1, -1)$.

$$\begin{cases} 3x + 4y - 11 = 0 \\ 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{r} 3x + 4y - 11 = 0 \\ -3x + 2y - 1 = 0 \\ \hline 6y - 12 = 0 \end{array} \;\rightarrow\; y = 2$$

$$3x + 8 - 11 = 0 \rightarrow 3x = 3 \rightarrow x = 1$$

Luego $C(1, 2)$.

Para calcular el ortocentro del triángulo hallamos las ecuaciones de dos alturas y resolvemos el sistema formado por ellas:

Altura h_1 que parte de A es perpendicular a BC

Pendiente de BC: $m_1 = \frac{3}{2}$ $\rightarrow$ pendiente de h_1: $m_1' = -\frac{2}{3}$

Ecuación de h_1: $y - 5 = -\frac{2}{3}(x + 3) \rightarrow 3y - 15 = -2x - 6 \rightarrow 3y + 2x - 9 = 0$

Altura h_2 que parte de B es perpendicular a AC

Pendiente de AC: $m_2 = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$ $\rightarrow$ pendiente de h_2: $m_2' = \frac{4}{3}$

Ecuación de h_2: $y + 1 = \frac{4}{3}(x + 1) \rightarrow 3y + 3 = 4x + 4 \rightarrow 3y - 4x - 1 = 0$

Resolvemos el sistema:
$$\begin{cases} 3y + 2x - 9 = 0 \\ 3y - 4x - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{r} 3y + 2x - 9 = 0 \\ -3y + 4x + 1 = 0 \\ \hline 6x - 8 = 0 \end{array} \;\rightarrow\; x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$3y + \frac{8}{3} - 9 = 0 \rightarrow 3y - \frac{19}{3} = 0 \rightarrow y = \frac{19}{9}$$

El ortocentro es $\left(\frac{4}{3}, \frac{19}{9}\right)$.

EJERCICIO 31 :

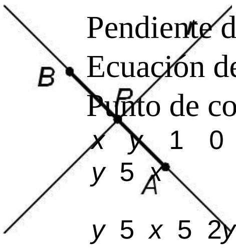
La recta $r: x \; y \; 1 \; 0$ es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ del que conocemos $A(3, 2)$.

Halla:

a) El punto de intersección de r con la perpendicular a r trazada desde A.

b) El punto B.

Solución:



a Pendiente de r : $y \quad x \quad 1 \qquad m \quad 1$

Pendiente de la perpendicular a r : $m \qquad 1$

Ecuación de la perpendicular: $y \quad 2 \quad 1\, x \quad 3 \quad 5 \quad x$

Punto de corte:

$x \quad y \quad 1 \quad 0 \qquad x \quad 5 \quad x \quad 1 \quad 0 \qquad x \quad 2$

$y \; 5 \; x$

$y \; 5 \; x \; 5 \; 2 \; y \; 3$ Por tanto, $P(2, 3$.

b El punto $B\, x, y)$ es el simétrico de A respecto de P :

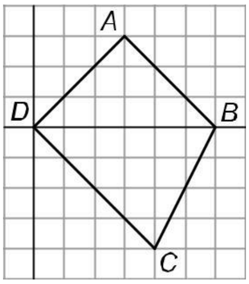
$$\frac{x\ 3}{2} \quad 2 \qquad x\ 1$$

$$B\ 1, 4$$

$$\frac{y\ 2}{2} \quad 3 \qquad y\ 4$$

EJERCICIO 32 : **Comprueba que el cuadrilátero de vértices *A* 3, 3 , *B* 6, 0 , *C* 4, 4 y *D*(0, 0 es un trapecio rectángulo y halla su área.**

Solución:



Para ver que es un trapecio rectángulo, comprobamos que un lado *DA* es perpendicular a otros dos *CD* y *AB* :

DA es la bisectriz del primer cuadrante m 1 *AB* y

CD tienen pendiente 1

Luego *DA* es perpendicular a *AB* y *CD* el trapecio es rectángulo.

Calculamos el área hallando las siguientes distancias:

$dist\ A, B \quad \sqrt{6\ 3^2 \quad 0\ 3^2} \quad \sqrt{9\ 9} \quad \sqrt{18}\ 3\ \sqrt{2}$

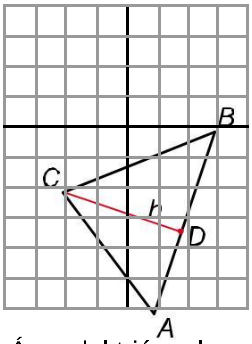
$dist\ C, D \quad \sqrt{4^2 4^2} \quad \sqrt{16\ 16} \quad \sqrt{32}\ 4\ \sqrt{2}$

$dist\ D, A \quad \sqrt{3^2 3^2} \quad \sqrt{18} \quad 3\sqrt{2}$ altura del trapecio

$$\text{Área} \quad \frac{\overline{AB} \quad \overline{CD} \quad \overline{DA}}{2} \quad \frac{3\sqrt{2} \quad 4\sqrt{2} \quad 3\sqrt{2}}{2} \quad \frac{7\sqrt{2}\ 3\ \sqrt{2}}{2} \quad \frac{21\sqrt{2}^{\,2}}{2} \quad \frac{21\ 2}{2}\ 21\ \text{u}^2$$

EJERCICIO 33 : **Calcula el área del triángulo de vértices A 1, 4 , B(3, 2 y C 2, 0 .**

Solución:



Área del triángulo $\frac{\overline{AB} \quad \overline{CD}}{2}$

Llamamos h a la altura que parte del vértice C.

$\overline{AB} \quad \sqrt{3 \;\; 1^2 \quad 2 \;\; 4^2} \qquad \sqrt{2^2 \quad 6^2} \quad \sqrt{4 \;\; 36} \quad \sqrt{40}$

La altura h es perpendicular al lado AB:

Pendiente de AB : $m \quad \frac{6}{2} \; 3$ ecuación de AB : $y \;\; 2 \;\; 3 \, x \;\; 3 \qquad 3x \;\; y \;\; 7 \;\; 0$

Pendiente de h : $m \quad \frac{1}{3}$

La recta h pasa por C y su pendiente es $\frac{1}{3}$.

$h : y \quad \frac{1}{3} \qquad x \;\; 23y \;\; x \;\; 2x \;\; 3y \;\; 2 \;\; 0$

Buscamos el punto de intersección, D, de la recta h con el lado AB :

$$\begin{array}{lll} 3x \;\; y \;\; 7 \;\; 0 & 9x \;\; 3y \;\; 21 \;\; 0 & \\ x \;\; 3y \;\; 2 \;\; 0 & \underline{x \;\; 3y \;\; 2 \;\; 0} & \\ & 10x \;\; 19 \;\; 0 & x \;\; \frac{19}{10} \end{array}$$

$\frac{19}{10} \; 3y \;\; 2 \;\; 03y \qquad \frac{39}{10} \qquad y \; \frac{13}{10}$

Por tanto, $D \quad \frac{19}{10}, \frac{13}{10}$

$\overline{CD} \quad \sqrt{\frac{19}{10} \;\; 2^{\,2} \quad \frac{13}{10}^{2}} \quad \sqrt{\frac{39}{10}^{2} \quad \frac{13}{10}^{2}} \quad \frac{1}{10}\sqrt{1690}$

Área $\quad \frac{\sqrt{40} \;\; \frac{1}{10}\sqrt{1690}}{2} \quad \frac{\sqrt{67600}}{20} \quad \frac{260}{20} \quad 13 \text{ u}^2$

EJERCICIO 34 : **Calcula los puntos de corte de la circunferencia x^2 y^2 5 con la recta y x 1 0.**

Solución:

Los puntos de corte son las soluciones del sistema que forman sus ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} x^2 \quad y^2 \quad 5 & x^2 \quad 1 \;\; x^2 \quad 5x^2 \;\; 1 \;\; 2x \;\; x^2 \quad 52x^2 \quad 2x \;\; 4 \;\; 0 \\ y \;\; x \;\; 1 \qquad 0 & y \;\; 1 \;\; x \end{array}$$

$x^2 \quad x\ 2\ 0 \quad x\ \frac{1\ \sqrt{1\ 8}}{2}\ \frac{1\ 3}{2}$ $\quad 2 \quad y\ 1\ x\ 1\ 2 \quad 1$

$1 \quad y\ 1\ x\ 1\ 1\ 2$

Los puntos de corte son 2, 1 y 1, 2 .

EJERCICIO 35 : **Dos de los vértices del triángulo *ABC* son *A*(1, 7 y *B* 5, 2 .**

a Calcula las coordenadas de *C* sabiendo que la recta *x* 3 0 es la mediatriz del segmento *BC*.

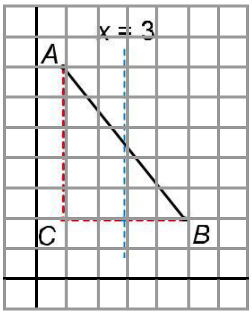
b Calcula la ecuación de la altura *h* que parte de *C*.

Solución:

a La mediatriz del segmento *BC* es perpendicular a dicho segmento. Si la recta mediatriz es *x* 3, la recta perpendicular a ella que pasa por *B* 5, 2 es *y* 2.

Por tanto, el punto medio del segmento *BC* es 3, 2 .

Llamamos *C a, b* : $\frac{a\ 5}{2}\ 3 \quad a\ 5\ 6 \quad a\ 1$; $\frac{b\ 2}{2}\ 2 \quad b\ 2\ 4 \quad b\ 2$ $\quad C\ 1, 2$



b La altura *h* que parte de *C* es perpendicular al segmento *AB*.

Pendiente de $AB : m \quad \frac{5}{4}$

Pendiente de $h : m \quad \frac{4}{5}$

La recta h que pasa por C 1, 2 y tiene de pendiente $\frac{4}{5}$ es :

$y\ 2 \quad \frac{4}{5}x\ 1 \quad 5y\ 10\ 4x\ 4 \quad 4x\ 5y\ 6\ 0$